

## Anomalien von $Q$ in Abhängigkeit von $s$

### Was ist mit Anomalie gemeint?

Werden bei der Berechnung einer Grundwasserabsenkung die Parameter verändert, um vergleichende Untersuchungen anzustellen, so erhält man gelegentlich Ergebnisse, die nicht den Erwartungen entsprechen oder gar völlig unsinnig sind. Diese Beobachtungen waren der ursprüngliche Anlass für die Entwicklung von GwR.

Aufgrund der physikalischen Vorstellungen vom Entwässerungsvorgang müssen von einem Berechnungsmodell für Grundwasserabsenkungen mindestens diese vier Bedingungen erfüllt werden:

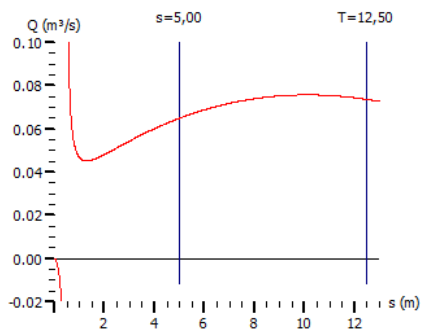
- **B1:** Der Wasserandrang  $Q$  kann für alle Absenktiefen  $s$  zwischen 0 und  $T$  berechnet werden
- **B2:** Wenn  $s$  verringert wird, verringert sich der Wasserandrang, und für  $s = 0$  ist  $Q = 0$ .
- **B3:** Wenn  $s$  zunimmt, nimmt auch  $Q$  zu.
- **B4:**  $Q(s)$  ist beschränkt

Kurz gesagt, muss für  $s = 0$   $Q(s) = 0$  sein und  $Q$  muss mit  $s$  monoton bis zu einem (nur theoretischen) Maximum bei  $Q(H)$  steigen. Variiert man bei der Berechnung einer Grundwasserabsenkung die Absenktiefe  $s$ , so erhält man aber gelegentlich Ergebnisse, die den Erwartungen nicht entsprechen. Es lassen sich vier Arten von Anomalien unterscheiden:

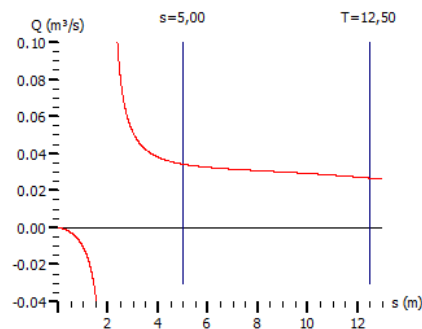
- **A1:** Bei sich verringernder Absenktiefe steigt der Wasserandrang  $Q$ .
- **A2:** Bei steigender Absenktiefe ändert sich  $Q$  nur unwesentlich.
- **A3:** Bei steigender Absenktiefe sinkt  $Q$ .
- **A4:**  $Q(s)$  wird negativ

## Typische Verläufe der Funktionsgraphen $s \rightarrow Q(s)$

### Freie Oberfläche

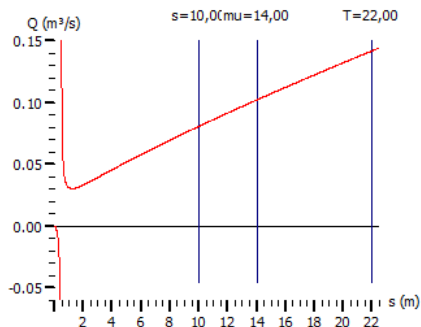


Typischer Verlauf

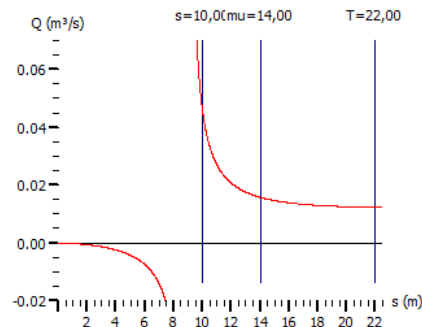


Voll ungültiger Verlauf

### Gespannte Oberfläche



Typischer Verlauf



Voll ungültiger Verlauf

Die zugehörigen Parameter sind:

**frei typisch:**  $s = 5 \text{ m}$ ,  $A_{RE} = 30 \text{ m}$ ,  $k = 5E-4 \text{ m/s}$ ,  $T = H = 12,5 \text{ m}$

**frei ungültig:**  $s = 5 \text{ m}$ ,  $A_{RE} = 60 \text{ m}$ ,  $k = 1E-4 \text{ m/s}$ ,  $T = H = 12,5 \text{ m}$

**gespannt typisch:**  $s = 10 \text{ m}$ ,  $A_{RE} = 30 \text{ m}$ ,  $k = 5E-4 \text{ m/s}$ ,  $T = H = 22 \text{ m}$

**gespannt ungültig:**  $s = 10 \text{ m}$ ,  $A_{RE} = 85 \text{ m}$ ,  $k = 1E-5 \text{ m/s}$ ,  $T = H = 22 \text{ m}$

Es ist außerdem  $r_{Br} = 0,3 \text{ m}$  und der ruhende Grundwasserspiegel liegt 1m unter OkG.

Die beiden Bilder zum typischen Verlauf zeigen deutlich, **warum es bei sehr flachen Absenkungen immer Probleme mit der Berechnung gibt**. Links vom beim typischen Verlauf immer vorhandenen Tiefpunkt steigt  $Q(s)$  zunächst sehr schnell gegen  $\infty$  und wird für noch kleinere Werte von  $s$  sogar negativ. Mit GwR kann man alle hier relevanten Stellen (Extremstellen, Polstellen usw.) berechnen.

### Wie die Anomalien entstehen

Bei der Berechnung von im Verhältnis zu den Baugrubenmaßen flachen Absenkungen tritt die erste Anomalie regelmäßig auf. Wir wollen klären, woran das liegt und eine Lösung vorschlagen, die den Forderungen B1 - B4 genügt und damit die Anomalien beseitigt.

Bei **freiem Spiegel** gilt für den Wasserzufluss zu einem vollkommenen Brunnen nach Dupuit-Thiem bekanntlich folgende Gleichung:

$$Q = \frac{\pi \cdot k \cdot (H^2 - h^2)}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}$$

Üblicherweise verwendet man als Randbedingung die Reichweitenformel von Sichardt mit:

$$R = 3000 \cdot s \cdot \sqrt{k}$$

Für den Brunnenradius  $r$  ist  $A_{RE}$ , der Ersatzradius der Baugrube zu setzen. Beachtet man noch  $h = H - s$ , so geht die Formel über in:

$$Q = \frac{\pi \cdot k \cdot (2 \cdot H \cdot s - s^2)}{\ln\left(\frac{3000 \cdot s \cdot \sqrt{k}}{A_{RE}}\right)}$$

Die oben genannten Anomalien ergeben sich nun einfach aus den mathematischen Eigenschaften der Funktion  $s \rightarrow Q(s)$ , insbesondere aus der Tatsache, dass die Absenktiefe  $s$  im Zähler und im Nenner des Funktionsterms auftritt.

Bei einem **gespannten Leiter** erhält man entsprechend:

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot m \cdot s}{\ln\left(\frac{3000 \cdot s \cdot \sqrt{k}}{A_{RE}}\right)}$$

Auch diese Funktion weist (aus den gleichen Gründen) Anomalien auf.

### Genauere Erklärung dieser Aussage

Bekanntlich ist  $\ln(1) = 0$  und durch 0 kann man nicht dividieren. Nun kann man leicht ausrechnen, dass für  $s = \frac{A_{RE}}{3000\sqrt{k}}$  der Nenner 0 wird. Der Graph der Funktion hat hier eine sogenannte Pol-

stelle mit Vorzeichenwechsel; genau diese Polstelle ist in den Abbildungen zu sehen. Bei Annäherung an die Polstelle von rechts (d.h. mit abnehmender Absenktiefe) wächst  $Q$  gegen  $\infty$  und für  $s < s_{Pol}$  wird  $Q$  negativ. Nun liegt diese Polstelle (abhängig von  $A_{RE}$  und  $k$ ) in einem Bereich, der auch

in der Praxis gar nicht so selten auftritt. So erreichen mich immer wieder Support-Anfragen zu vermeintlichen Fehlern in den Berechnungen mit ProAqua, bei denen es sich dann herausstellt, dass die Absenkung den "kritischen Bereich" in der Nähe der Polstelle betrifft.

GwR erstellt für alle diese Funktionen Funktionsgraphen und erlaubt so eine schnelle Analyse und Beurteilung der Daten eines Projektes. Ursache für die Anomalien ist die Sichardtsche Reichweitenformel und mit der Einführung der "Minimalreichweite" werden sie beseitigt. Ausführlich wird diese Problematik in dem Aufsatz Weyrauch / Schöffel analysiert. Dort wird auch dargestellt, dass die sogenannte Weyrauch-Näherung zwar die Polstelle beseitigt, aber nicht die Anomalien. Die drei in diesem Aufsatz benutzten Beispiele sind im Projekt-Ordner der Software GwR gespeichert.