

Die sogenannte Weyrauch-Näherung

Was ist die Weyrauch-Näherung?

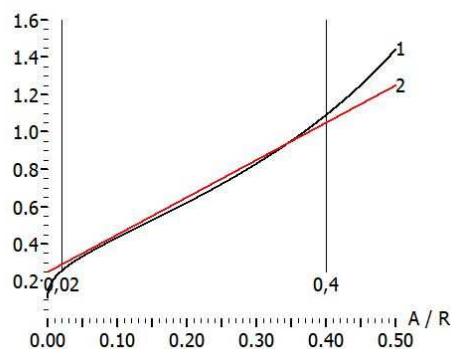
In Herth/Arndts wird die Weyrauch-Näherung als eine Lösung des Anomalien-Problems angeboten. Bei bestimmten Bedingungen kann es vorkommen, dass „die Zuströmung Q mit kleiner werdenden Absenkungen größer wird. ... Weyrauch schlägt in einer nicht veröffentlichten Arbeit vor, in

derartigen Fällen für den Wert $\frac{1}{2,3(\lg R - \lg A_{RE})} = 2 \cdot \frac{A_{RE}}{R} + 0,25$ zu setzen, der empirisch gefunden worden ist" (S. 90). Der Vorschlag lautet also, Q als eine abschnittsweise definierte Funktion festzulegen:

$$Q = \begin{cases} \frac{\pi \cdot k \cdot (H^2 - h^2)}{\ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right)} & \ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) \geq 1 \\ \pi \cdot k \cdot (H^2 - h^2) \cdot \left(2 \cdot \frac{A_{RE}}{R} + 0,25\right) & \ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) < 1 \end{cases}$$

Nun meint „empirisch gefunden“ nach üblichem Sprachgebrauch: es wurden Messungen durchgeführt und daraus ging die Formel hervor. Im Falle der Weyrauch-Formel entspricht dies aber nicht den Tatsachen¹, denn der Funktionsterm ergibt sich als eine innerhalb gewisser Grenzen hinreichend genaue lineare Näherung der logarithmischen Kurve $x \rightarrow \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{\ln(x)}$, die in der Du-

pit-Thiemschen Formel mit $x = \frac{A_{RE}}{R}$ auftritt.



Die Abbildung zeigt den Graphen der logarithmischen Kurve (1) und den der linearen Funktion, die durch $y = 2 \cdot x + 0,25$ (2) gegeben ist.

Für $0,02 < x < 0,4$ approximiert die lineare Funktion die logarithmische mit einer Genauigkeit, die innerhalb der Grenzen der sonstigen Parameter liegt.

Welche Grenzen ergeben sich daraus für $\ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right)$?

$$\begin{aligned}
 & 0,02 < \frac{A_{RE}}{R} < 0,4 && |^{-1} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{0,02} > \frac{R}{A_{RE}} > \frac{1}{0,4} && | \ln \\
 \Leftrightarrow & \ln\left(\frac{1}{0,02}\right) > \ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) > \ln\left(\frac{1}{0,4}\right) \\
 \Leftrightarrow & 3,91 > \ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) > 0,91 \approx 1
 \end{aligned}$$

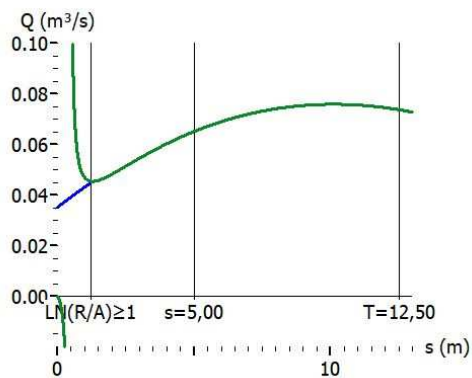
Womit auch die Herkunft der Grenze in der obigen Formel für Q für den Wechsel des Funktions-terms geklärt wäre. Mit Hilfe einer linearen Regression kann man das Ergebnis noch verbessern², aber darauf kommt es gar nicht an, wie wir gleich sehen werden. Es sei noch einmal deutlich gesagt: Der Vorschlag von Herth/Arndts lautet, die Weyrauch-Näherung gerade *außerhalb ihres Gültigkeitsbereichs* zu verwenden und zwar dann, wenn $\ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) < 1$ ist.

Wie wirkt sich die Weyrauch-Näherung aus?

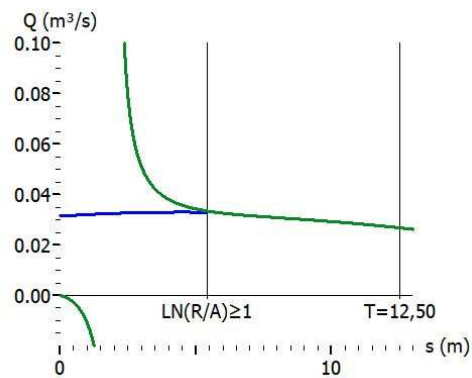
Die Approximation ist völlig unabhängig von der benutzen Reichweitenformel verwendbar und

kann dann eingesetzt werden, wenn der Nenner $\ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right)$ lautet (und die oben angegebenen Grenzen eingehalten werden). Wie sich die Näherung auf den Verlauf des Graphen der Funktion Q_s auswirkt, wenn man die Sichardtsche Reichweitenformel einsetzt, zeigen die nachstehenden Abbildungen.

Freie Oberfläche

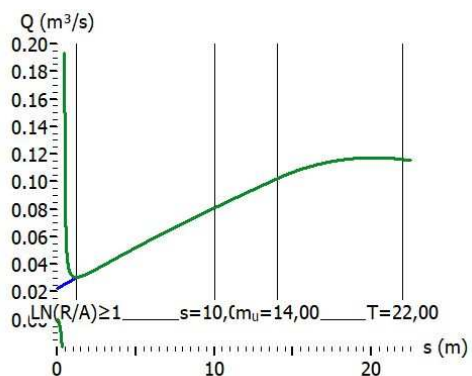


Typischer Verlauf

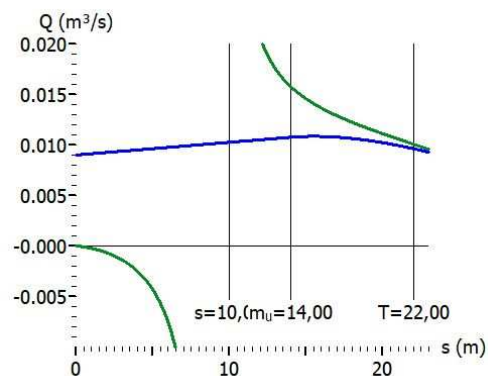


Voll ungünstiger Verlauf

Gespannte Oberfläche



Typischer Verlauf



Voll ungünstiger Verlauf

Grün: $Q(s)$ mit Sichardt-Reichweite; Blau: $Q(s)$ mit Weyrauch-Näherung.

frei typisch: $s = 5$ m, $A_{Re} = 30$ m, $k = 5E-4$ m/s, $H = T = 12,5$ m, $r = 0,3$ m. **frei ungünstig:** $s = 10$ m, $A_{Re} = 60$ m, $k = 1E-4$ m/s, $H = T = 12,5$ m, $r = 0,3$ m. **gespannt typisch:** $s = 5$ m, $A_{Re} = 30$ m, $k = 5E-4$ m/s, $H = T = 22$ m, $r = 0,3$ m. **gespannt ungünstig:** $s = 10$ m, $A_{Re} = 85$ m, $k = 1E-5$ m/s, $H = T = 22$ m, $r = 0,3$ m. **Hinweis:** Die Graphen wurden mit GwR erzeugt und GwR benutzt hier die oben gezeigte abschnittsweise definierte Funktion. Der Verlauf nach Weyrauch wird also nur für $\ln(R/A_{Re}) < 1$ dargestellt.

Details zum Graphen der Weyrauch-Funktion

Mit Weyrauch-Funktion ist der Teil der abschnittsweise definierten Funktion $s \rightarrow Q(s)$ gemeint, der für $\ln(R/A_{Re}) < 1$ gilt. Ich setze im Folgenden die Sichardtsche Reichweitenformel voraus; wenn man die nach Kussakin verwendet, ändert sich im Wesentlichen nichts.

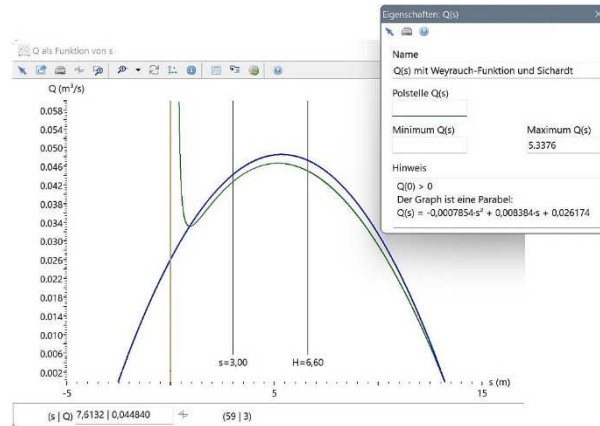
Freie Oberfläche

Der Graph der Weyrauch-Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel; ihr Scheitelpunkt

liegt bei $s_{\max} = H - \frac{4 \cdot A_{Re}}{c_R \cdot \sqrt{k}}$, wobei mit c_R der Faktor in der Sichardtschen Reichweitenformel

gemeint ist, gewöhnlich ist also $c_R = 3000$. Verwendet man die Reichweitenformel nach

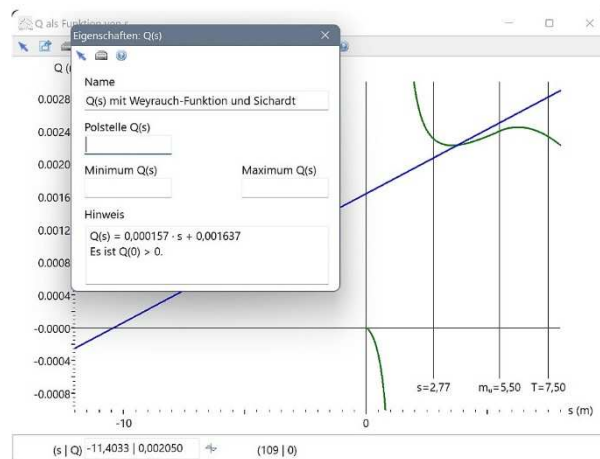
Kussakin, dann ist $s_{\max} = H - \frac{4 \cdot A_{RE}}{575 \cdot \sqrt{k \cdot H}}$.



Es kann durchaus vorkommen, dass $s_{\max} \leq 0$ ist; dann ist der Verlauf im 1. Quadranten monoton fallend (der größte Wasserandrang liegt bei $s = 0$ vor) und damit vollständig ungültig. Ein (reales) Beispiel ist weiter unten aufgeführt.

Gespannte Oberfläche

Der Graph der Weyrauch-Funktion ist eine Gerade mit positiver Steigung; auch hier ist $Q(0) > 0$.



Ein Vorteil der Weyrauch-Approximation

Es ist nur ein Vorteil erkennbar: Die Polstelle wird beseitigt, $Q(s)$ wird nicht mehr negativ.

... und viele Nachteile

Diesem Fortschritt stehen allerdings erhebliche Schwächen gegenüber.

1. Man erhält man mit der Weyrauch-Formel (mit Sichardt-Reichweite) für $s = 0$ einen nicht verschwindenden Wasserandrang, denn es ist: $Q_s(0) = \frac{4 \cdot \pi \cdot A_{RE} \cdot H \cdot \sqrt{k}}{c_R} > 0$. Für Beispiel 1a

$$Q_s(0) = \frac{4 \cdot \pi \cdot A_{RE} \cdot H \cdot \sqrt{k}}{c_R} > 0$$

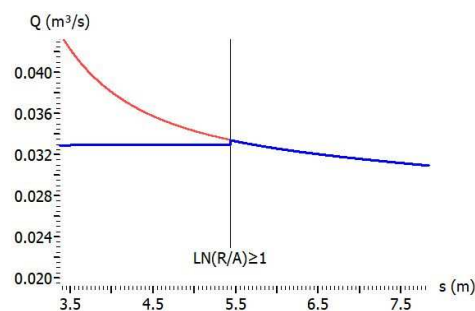
(Herth /Arndts) ergibt das immerhin 126,45 m³/h.

2. An der Übergangsstelle der abschnittsweisen definierten Funktion tritt eine Unstetigkeit auf,

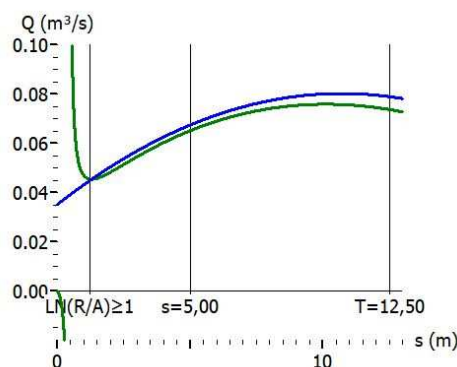
denn für $\ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) = 1 \Leftrightarrow s = \frac{e \cdot A_{RE}}{3000 \cdot \sqrt{k}}$ ist $Q(s)$ nach Weyrauch berechnet um den Faktor

$$\frac{2}{e} + 0,25 \approx 0,986 \text{ kleiner als der nach Dupuit-Thiem berechnete Wert für den Wasserandrang.}$$

Man könnte diese Unstetigkeit durch eine genauere Approximation verringern, aber nicht beseitigen.



3. Die Approximation ist nicht ganz so genau, wie die erste Grafik vielleicht vermuten lässt:

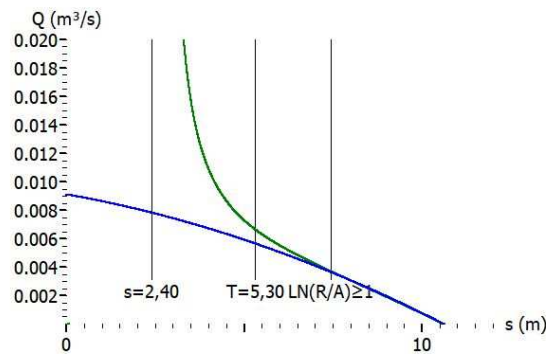


Grün: $Q(s)$ mit Sichardt-Reichweite; Blau: $Q(s)$ mit Weyrauch-Näherung, die hier durchgängig verwendet wird. Es findet also kein

Wechsel des Funktionsterms bei $\ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) \geq 1$ statt.

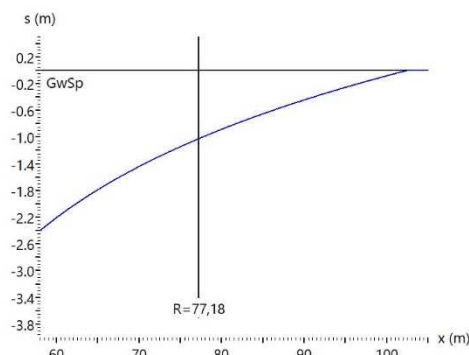
Mit den Daten aus dem ersten Beispiel ergibt sich bei $s = 5$ m immerhin ein Unterschied bei Q von etwa 8,3 m³/h.

4. Oben hieß es: Bei bestimmten Bedingungen kann es vorkommen, dass „die Zuströmung Q mit kleiner werdenden Absenkungen größer wird.“ Und die Weyrauch-Approximation wurde als Lösung für diese *Anomalie* angeboten. Aber auch sie versagt bei „bestimmten Bedingungen“, wie das folgende reale Beispiel aus dem Raum Gronau zeigt.

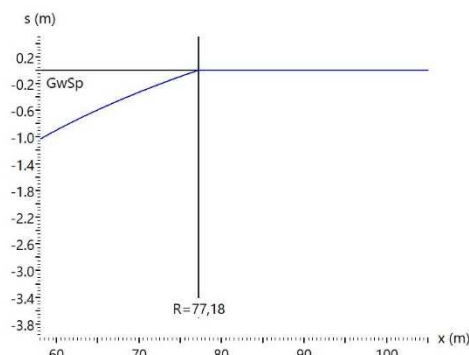


Daten: freie Oberfläche, $k = 5E-5$ m/s, $s = 2,40$ m, $H = T = 5,3$ m, $r = 0,2$ m. Vom Auftraggeber war eine vergleichende Berechnung bei kleiner werdender Absenktiefe verlangt.

5. Die Berechnung von Q nach Weyrauch ist ein (versteckter) Zu- bzw. Abschlag zu Q und wie jeder andere Zu- oder Abschlag stört er das Gefüge der Gleichungen, mit denen eine Grundwasserabsenkung berechnet wird. Er macht sich dadurch bemerkbar, dass entweder die Absenkung in der Entfernung R nicht 0 ist oder die Absenkung in der Entfernung A_{RE} nicht gleich s . Welcher der beiden Fehler auftritt, hängt von der bei der Integration der Differentialgleichung nach Dupuit-Thiem verwendeten Randbedingung ab. Daten: siehe vorherige Abbildung.



Randbedingung: $x_2 = A_{RE}$, $y_2 = H - s$



Randbedingung: $x_2 = R$, $y_2 = H$

Ernüchterndes Fazit

Die Approximation ist einigermaßen genau in einem Bereich, in dem es heute keinen Vorteil bringt, sie zu benutzen³. Wird sie über ihren Gültigkeitsbereich hinaus fortgesetzt und insbesondere für

Werte s mit $\ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) < 1$ eingesetzt, so wird zwar die Polstelle von Q_s beseitigt, aber die Anoma-

lien bleiben bestehen. Mit der Weyrauch-Approximation kann allenfalls eine obere Grenze für den Wasserandrang bei flachen Absenkungen ermittelt werden. Kurz gesagt: Die in Herth/Arndts dargestellte Lösung für das Problem der Berechnung flacher Absenkungen ist nicht haltbar und die

sogenannte Weyrauch-Formel sollte zu ihrer Berechnung nicht angewandt werden – jedenfalls nicht ohne eine Analyse der Situation mit GwR.

Trotz dieser offenkundigen Schwächen wird die Approximation benutzt. Stelzig⁴ behandelt eine Grundwasserabsenkung, bei der $\ln\left(\frac{R}{A_{RE}}\right) \approx 0,73$ ist und verwendet ohne weiteren Kommentar

die Berechnung nach Weyrauch. Wegen der verbreiteten Verwendung in der Praxis ist die Weyrauch-Näherung auch in unserer Software verfügbar - kann aber abgeschaltet werden.

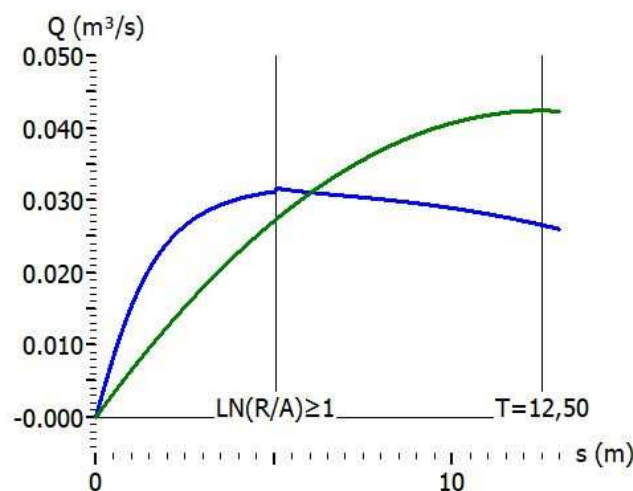
Weyrauch + Weber - ein Teil der Probleme ist gelöst!

Von Weber stammt der Vorschlag, die Reichweite unter Berücksichtigung des Ersatzradius wie folgt zu berechnen:

$$R_{\text{Weber}} = \sqrt{R_{\text{Si}}^2 + A_{\text{RE}}^2}$$

(vgl. Herth/Arndts (100), S. 97)

Für flache Absenkungen geht die Weber-Reichweite nicht gegen 0, wie die Sichardt-Reichweite, sondern gegen A_{RE} . Kombiniert man die Weyrauch-Näherung mit der Reichweiten-Formel von Weber, dann erhält man einen Verlauf des Graphen der Funktion $s \rightarrow Q(s)$, der, wenigstens für flache Absenkungen, die Anforderungen (vgl. Anomalien) erfüllt. Ob die so ermittelten Wassermengen auch „richtig“ sind ist eine andere Frage...



freie Oberfläche: $k = 0,0001$ m/s, $H = T = 12,5$ m, $s = 5$ m, $A_{RE} = 60$ m. Der grün dargestellte Graph zeigt zum Vergleich $Q(s)$ mit der Minimalreichweite berechnet.

Geschichte: V 1.0 27.06.16 | V 1.1 01.07.18 | V 1.2 -2.02 21.04.22 - 02 22.05.22 | V 2.03 06.09.24

¹ Persönliche Mitteilung von Dipl. Ing. Fritz Weyrauch.

² Bei 20 Datenpunkten im Intervall $[0, 0.4]$ erhält man $y = 2.0944 \cdot x + 0.2138$ als optimale lineare Näherung.

³ Die Näherung war für Weyrauch nach eigenen Aussagen vor allem als Rechenvereinfachung interessant - sie wurde schließlich in der Zeit der *Rechenschieber* entwickelt!

⁴ S. Stelzig, Wasserhaltung. In: Handbuch Geotechnik. Grundlagen – Anwendungen – Praxiserfahrungen; Hrsg. Conrad Boley, Springer Vieweg (eBook) 2019), 261-327.